SUJET :

ANALYSE DES DIFFICULTES RENCONTREES PAR LES ELEVES DE 6ème ANNEE DES HUMANITES SCIENTIFIQUES SUR LA RESOLUTION DES EQUATIONS DU TROISIEME DEGRE DANS ℂ
(*Cas de Quelques Ecoles Non Conventionnées de la ville de Kisangani* : 2019 – 2020)

Par l'Assistant IGBOLO PAMBULA André
De l'Institut Supérieur Pédagogique d'Ubundu (ISP-UBUNDU)

RESUME

Dans le cadre de la recherche en pédagogie active, l'apprentissage de Mathématiques s'avère impératif.

Certaines équations du second degré résolues dans l'ensemble R dont le discriminant est négatif n'ont pas trouvé de solutions. C'est pourquoi il y a eu naissance d'un nouvel ensemble ℂdes nombres complexes constitué des parties réelle et imaginaire.

C'est pendant notre carrière d'enseignement de Mathématiques que nous avions constaté que certains élèves finalistes de Scientifique éprouvaient des difficultés pour résoudre une équation du 3e degré dans ℂ, lesquelles difficultés ont constitué un problème pédagogique réel. La cause majeure de ces difficultés est la non maîtrise de la méthode de diviseurs binôme du terme indépendant pour déterminer Z_0*, la première racine de l'équation donnée, la règle de Horner pour trouver le quotient* $Q(Z) = az^2 + bz + c$*, le calcul du discriminant de* $Q(Z) = 0$ *et la recherche des racines carrées de ce discriminant pour enfin trouver les racines complètes de l'équation de départ.*

Notre étude est menée sur un échantillon composé de 120 élèves où 21 élèves seulement (soit 17,5%) se sont bien comportés lors de la résolution de ces équations contre 99 élèves (soit 82,5%) qui ont éprouvé de sérieuses difficultés. Les coefficients ont constitué les principales variables de notre recherche.

ABSTRACT

In the context of active pedagogy research, learning Mathematics is imperative.

Some quadratic equations solved in the set R whose discriminant is negative have not found solutions. This is why a new set of complex numbers has been born, made up of the real and imaginary parts.

It was during our teaching career in Mathematics that we noticed that some Scientist finalist students had difficulty solving a 3rd degree equation in ℂ, which difficulties constituted a real educational problem. The major cause of these difficulties is the lack of mastery of the method of binomial divisors of the independent term to determine Z0, the first root of the given equation, Horner's rule to find the quotient Q (Z) = az2 + bz + c, the computation of the discriminant of Q (Z) = 0 and the search for the square roots of this discriminant to finally find the full roots of the starting equation.

Our study is conducted on a sample of 120 students where only 21 students (17.5%) performed well when solving these equations against 99 students (82.5%) who experienced serious difficulties. The coefficients were the main variables in our research.

1. ETAT DE LA QUESTION

La recherche scientifique apparaît souvent comme une activité utilisant des modes des pensées très différentes, des modes communs mettant en œuvre des techniques diverses.

L'activité de tout chercheur exige une large connaissance approfondie dans le domaine considéré et les résultats auxquels elle aboutit constitue des progrès modestes par rapport aux connaissances antérieures dans une voie orientée par d'autres. Citons :

OHOMA KONGA Baudouin (2007), dans son mémoire sur ‘’ l’analyse des difficultés rencontrées par les élèves de sixième année des humanités scientifiques sur les équations dans le corps de nombres complexes " dans la ville de Kisangani constate que la non maîtrise des opérations dans le corps des nombres complexes est à la base des difficultés des élèves et propose aux élèves de s’approprier les opérations dans le corps des nombres complexes en faisant beaucoup d’exercices en équipe.

WUNGU EMBONDO (2006), dans son mémoire intitulé « Apprentissage de l’enseignement des écritures complexes des isométries usuelles », dans les classes de $6^{ème}$ année des humanités scientifiques et techniques, montre que les difficultés d’apprentissages sur les écritures complexes des isométries usuelles sont dues à la non maîtrise des nombres complexes en général et en particulier le calcul de module, de la détermination d’argument, dela forme exponentielle et à l’ignorance complète de la nature et des éléments caractéristiques des applications définies par leurs écritures complexes.

Il propose la production des manuels appropriés sur les écritures complexes des isométries usuelles et l’élaboration des contenues didactiques y relatives.

2. PROBLEMATIQUE

Dans tous les pays du monde et plus particulièrement dans notre pays la République Démocratique du Congo, l’enseignement considéré dans sa globalité revêt un caractère impératif. Il est le fondement même de tout progrès (scientifique, social, économique, …).

Dès l’école primaire, les enseignements de Mathématiques ont eu à effectuer les opérations des différents nombres ; citons :

Les nombres naturels, les entiers relatifs, les décimaux, les rationnels, … chacun d’eux présentant une particularité à part entière avec les propriétés connues. A la fin du cycle secondaire, il y a naissance d’un ensemble nouveau appelé « ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes » caractérisé surtout par la lettre i.

Cet ensemble est constitué des parties réelle et imaginaire.Le programme national de mathématique (édition 2005) avait prévu l’étude des nombres complexes en 6^e des humanités scientifiques.

Toutes les opérations dans l’ensemble R sont aussi valables dans $\mathbb{C}$; car R étant alors un sous ensemble de $\mathbb{C}$.

Dans cet ensemble $\mathbb{C}$, certes, les élèves éprouvent d’énormes difficultés pour résoudre une équation du 3^e degré surtout si les coefficients sont complexes.

Pour l’équation du second qui sera obtenue à partir d’un procédé vu, on déterminera le discriminant pour enfin chercher sa racine carrée ($\Delta = b^2 - 4ac$).

Partant de ce qui précède, nous nous poserons la question principale suivante :

- Est-ce que les élèves de 6^e année scientifique sont capables de résoudre les équations du 3^e degré dans l’ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes ?
  De cette question principale, va naître deux autres qui sont des questions spécifiques, à savoir :
- Est-ce que les élèves de 6^e scientifique sont capables de résoudre un système de deux équations du 2^{nd} degré dans $\mathbb{C}$?
- Est-ce que ces élèves sont capables de déterminer la première racine de l’équation du 3^e degré dans $\mathbb{C}$?

3. HYPOTHESE DE LA RECHERCHE

En rapport avec nos questions de recherche, nos hypothèses émises sont les suivantes :

- ***Question principale***

Les élèves de 6^e année des humanités scientifiques seraient capables de résoudre les équations du 3^e degré dans $\mathbb{C}$.

- ***Questions particulières***
  - Les élèves de 6^e année scientifiques seraient capables de résoudre un système de deux équations du 2nd degré dans $\mathbb{C}$;
  - Les élèves de 6^e année scientifique seraient capables de déterminer la première racine de l'équation du 3^e degré dans $\mathbb{C}$.

4. OBJECTIFS DE LA RECHERCHE

Pour répondre à ces questions, l'objectif principal poursuivi par notre étude est de vérifier si les élèves de 6^e année scientifique sont capables de résoudre les équations du 3^e degré dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes et les objectifs spécifiques sont les suivants :

- Vérifier si les élèves de 6^e année scientifique sont capables de résoudre un système de deux équations du 2^{end} degré dans $\mathbb{C}$;
- Vérifier si les élèves de 6^e année scientifique sont capables de déterminer la première racine de l'équation du 3^e degré dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

5. INTERET DE LA RECHERCHE

Notre souci majeur pour cette étude est de mettre à la disposition des enseignants des classes terminales de la section scientifique, un outil pédagogique pouvant leur servir de guide sur la résolution des équations du 3^e degré dans C et l'assimilation de ces notions par ces élèves.

6. DELIMITATION DU SUJET

Le programme national en vigueur, de Mathématique (Edition 2005), tiré du manuel « Maîtriser les Maths », p. 58-64 avait prévu les équations du 3^e degré dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

7. METHODOLOGIE DE LA RECHERCHE

D'après J. D'HOMBRE, cité par HATEGE KIMANA (2012, p. 102), la méthode a pour objet l'étude de certains concepts capables d'une définition statique.

Dans toute recherche scientifique, il est d'abord important de déterminer la population d'étude.

Notre population d'étude est constituée des élèves de 6^e année des humanités scientifiques de quelques écoles non conventionnées de la ville de Kisangani au cours de l'année scolaire 2019-2020.

Sur un effectif total de 195 élèves, nous avions ciblé cinq écoles pour un échantillon de 120 élèves répartis comme suit :

- L'Institut de LUBUNGA : 32
- Complexe Scalaire LINA MPONGO : 29
- Complexe Scolaire TEDDI : 24
- Complexe Scolaire LA SAGESSE : 20
- Complexe Scolaire LA COLOMBE : 15.

Pour notre étude, deux techniques sont à envisager :

- Technique vivante fait recours au questionnaire d'enquête composé de 3 questions soumis aux élèves de 6^e scientifique. La passation de notre enquête a eu lieu en Janvier 2020 et a duré 50 minutes ;
- Technique documentaire consistant à puiser les données existantes dans les ouvrages, les revues, les articles et les autres publications scientifiques.

L'analyse statistique nous a permis de calculer les pourcentages de réussites et d'échecs avant leur interprétation.

Notons que les variables de notre étude sont les coefficients réels ou complexes de l'équation du 3^e degré dans $\mathbb{C}$.

L'analyse de notre étude a porté surtout sur les coefficients de l'équation et aussi les diviseurs du terme indépendant.

II. GENERALITES DES NOMBRES COMPLEXES

II.1. Historique

L'histoire des nombres complexes commence vers le milieu du XVIe siècle avec une première apparition en 1545, dans l'œuvre de l'Italien CARDAN, d'une expression contenant la racine carrée d'un nombre négatif, nombre qu'il appela sophistiqué. C'est RAPHAEL BOMBELLI qui met en place les règles de calcul sur ces quantités que l'on appelle alors impossibles avant de leur donner le nom d'imaginaires. Durant trois siècles, ces nombres sont regardés avec méfiance.

Les mathématiciens du XVIII^{e} siècle tentent avec audace de généraliser les fonctions de la variable réelle à la variable imaginaire tantôt avec succès, comme pour l'exponentielle complexe, tantôt avec plus d'aléas, comme pour la fonction racine n^{ième} ou la fonction logarithme complexe.

Durant la première moitié du XIX^{e} siècle se succèdent les tentatives de légitimation des nombres complexes comme représentation du plan, ensemble de polynômes ou structure algébrique définies sur des couples de réels.

Les nombres complexes sont nés de confrontation avec des opérations impossibles comme les racines carrées de nombres négatifs. Un des premiers mathématiciens à en imaginer l'existence est CARDAN en 1545. La résolution de l'équation du second degré nécessite que le discriminant soit positif. Or, dans le cas où l'équation initiale du troisième degré possède trois solutions réelles, ce discriminant est négatif.

La première formalisation avec règles de calcul sur ces quantités est l'œuvre de RAPHAEL BOMBELLI en 1572 dans son Algebra.

C'est selon DOMINIQUE FLAMENT, le créateur indiscutable de la théorie des nombres imaginaires ; qualifie les quantités qu'il manipule de plus en plus sophistiquées que réelles mais les utilise pour résoudre l'équation du troisième degré.

En 1637, RENE DESCARTE les baptise « nombres imaginaires ».

A cette époque, on ne se préoccupe pas de la convergence des séries proposées et on généralise les formules vues sur des quantités réelles selon le principe de permanence.

En 1706, MOIVRE introduit sa formule :

$$(cos\theta + isin\theta)^n = cos(n.\theta) + isin(n.\theta).$$

En 1777, EULER est à l'origine de la notation i

$$e^{i\emptyset} = cos\theta + isin\theta.$$

Les mathématiciens BERNOULLI, LEIBNIZ, ALEMBERT, ALBERT GIRARG, ARGAND, CAUCHY, GASPARD WESSEL, TARTAGLIA, … ont aussi contribué pour les nombres complexes pendant près d'un demi-siècle.

II.2. Insuffisance et prolongement de R dans ℂ

Les équations du 1er degré résolues dans l'ensemble Q des rationnels ont des racines possibles.

Par contre, l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution rationnelle car, on ne peut pas trouver un rationnel élevé au carré qui donne 2. La valeur de x est alors une approximation.

Les équations du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ avec discriminant négatif ($\Delta = b^2 - 4ac < 0$) dans l'ensemble des réels n'admettent pas de racines réelles. D'où l'insuffisance de l'ensemble R.

Pour remédier à cette situation d'insuffisance de R, il faut absolument le prolonger dans un ensemble plus vaste contenant R dans lequel on peut extraire les racines carrées des nombres surtout négatifs en posant $i^2 = -1$.

NOTIONS IMPORTANTES

- Carré d'un binôme : $(x \pm yi)^2 = x^2 \pm 2\,xyi - y^2$;
- Puissances de i
- Conjugué d'un nombre complexe non nul ;
- Module de Z = a + bi, $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Résolution d'une équation du 3e degré dans ℂ

Forme générale : $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ où a, b et c sont réels ou complexes ; Z la variable.

- Si le discriminant est Δ = a + bi alors ses racines s'obtiennent en posant :

$x^2 - y^2 = a$ (partie réelle)

$x^2 + y^2 = |z|$ et 2 xy = b (partie imaginaire)

METHODES DE RESOLUTION D'UNE EQUATION DU 3e DEGRE DANS ℂ

1ère Méthode

1. Recherche des diviseurs binômes ;
2. Règle de Horner (ou bien division euclidienne) pour déterminer le quotient sous la forme Q (Z) = $az^2 + bz + c$;
3. Equation du second degré dans ℂ :
   a) Calcul de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$;
   b) Equation binôme c'est-à-dire recherche de $\sqrt{\Delta}$;
   c) Recherche des racines de l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

2e Méthode

1. Mettre l'équation donnée sous la forme algébrique a + bi = 0
2. Résoudre le système d'équations
   a = 0
   b = 0 ceci pour déterminer la 1ère racine de l'équation du 3e degré.
3. Appliquer la règle de Horner pour déterminer le quotient Q (Z)
4. Résoudre l'équation Q (Z) = 0 avec Q (Z) fonction du second degré en Z
5. Enfin, écrire l'ensemble-solution de l'équation du 3e degré donnée.

3e Méthode

Les coefficients de l'équation sont réels.

Equation : $z^3 + az^2 + bz + c = 0$

1° Poser : Z = x +α ; x, α∈ R

2° Porter la valeur de Z dans (1) pour obtenir l'équation en x :

$$x^3 + (3\alpha + a)x^2 + (3\alpha^2 + 2a\alpha + b)x + \alpha^3 + a\alpha^2 + b\propto + c = 0 \quad (2)$$

3° Déterminer α de manière que l'équation (2) ne contienne pas des termes en x^2 :

$x^3 + px + q = 0$ (3) avec $3\,\alpha + a = 0 \leftrightarrow \alpha = \frac{-a}{3}$

$p = 3\alpha^2 + 2a\alpha + b$ et $q = \alpha^3 + a\alpha^2 + b \propto + c$

4° Pose x = u + v, avec $u.v = \frac{-p}{3} \in R$

L'équation (3) dans laquelle on porte cette valeur de x, permet d'obtenir le système :

$u^3 + v^3 = -q$

u.v $= -\frac{p}{3}$ (4)

5° Résoudre alors le système (4) par une des méthodes connues.

III.PRESENTATION ET ANALYSE DES RESULTATS

Equation 1 : $Z^3 - (3 + i)\,Z^2 + (2 + 3i)\,Z - 2i = 0$

(1) 12 élèves soit (10%) ont bien répondu ; ils maîtrisent alors toutes les étapes de la résolution d'une équation du troisième degré dans $\mathbb{C}$;
(2) 60 élèves (soit 50%) d'élèves se sont vraiment trompés dans certaines étapes de la résolution.

Voici quelques cas :

$$Z^3 - (3+i)Z^2 + (2+3i)Z - 2i = 0$$

Diviseurs de $-2\,i$: $\pm i, \pm 2\,i$

P$(i) = i^3 - (3+i)i^2 + (2+3\,i)i - 2\,i$

$= i + 3 + i + 2 + 3 - 2$

$= 6 - 2\,i \neq 0$

(3) 48 élèves (soit 40%) ont totalement échoué : les uns ne maîtrisent pas les calculs de i, par contre d'autres oublient la suppression des parenthèses précédées de signe négatif.

Equation 2 : $i\,Z^3 - 3\,Z^2 + iz - 3 = 0$

(1) 6 élèves (soit 5%) ont bien répondu en respectant toutes les étapes de résolution.
(2) 48 élèves (soit 40%) ne maîtrisent pas vraiment certaines étapes de résolution de cette équation. En voici quelques exemples de résolution.

$i\,(z^3 - z) + 3\,z^2 - z = 0$
$a + bi = 0$
$z^3 + z = 0$
$-3\,z^2 - 3 = 0$
$-3\,(z^2 + 1) = 0$
$z^2 = -1$
z $= \pm\sqrt{i^2}$
z $= \pm i$

Pour $z = i, \Rightarrow -i + i = 0$

i	-3		$+i$	-3
i		-1	i^3	3
i		$-3+i^2$	i^2	0

Ces élèves se sont trompés sur la règle de Horner dans sa 2e colonne où le calcul $-3 + i^2$ donne simplement – 3 – 1 = - 4 qu'il fallait placer à la 2e ligne en multipliant par i pour avoir - 4i de la 3e colonne.

Un autre exemple :

$i\,z^3 - 3\,z^2 + i\,z - 3 = 0$
$z^3 - \frac{3}{i}z^2 + z - \frac{3}{i} = 0$
$D_{\frac{3}{i}} = \left\{\pm\,i,\ \ \pm\,i,\ \ \pm\,\frac{3}{i}\right\}$

$a = 1,$

$$P\,(1) = 1^3 - \frac{3}{i}\,.1^2 + 1 - \frac{3}{i} = 0$$

$$= 1 - \frac{3}{i} + 1 - \frac{3}{i} = 0$$

$$= 2 - \frac{6}{i} \neq 0$$

$a = -1,$

$$P\,(-1) = (-1)^3 - \frac{3}{i}(-1)^2 + (-1)\left(\frac{3}{i}\right)$$

$$= -1 - \frac{3}{i} - 1 - \frac{3}{i}$$

$$= -2 - \frac{6}{i} \neq 0$$

$a = i,$

$$\mathrm{P}(1) = i^{+3} - \frac{3}{i}(i)^2 + i - \frac{3}{i}$$

$$= -i + \frac{3}{1} + i - \frac{3}{i} = 0$$

$Z_0 = i$

Horner

$$\begin{array}{c|c|}
 & 1 & \\
i & & \\
\hline
\end{array}$$

La démarche suivie par cet élève (qui a divisé les 3 membres de l'équation de départ par i) reste valable jusqu'au niveau $z_0 = i$ (soit la $1^{ère}$ racine de l'équation donnée). Cet élève est bloqué au niveau de la règle de Horner ne sachant pas calculer le conjugué de i qui est – i.

$\mathrm{i}\, z^3 - 3z^2 + iz - 3 = 0$

$\mathrm{i}\,(z^2 + z) - 3z^2 - 3 = 0$

$a + bi = 0$

$z^2 + z = 0$

$-3\,z^3 - 3 = 0$

$-3\,(z^2 + 1) = 0$

$z^2 = -1$

$z = \pm\sqrt{i^2}$

$z = \pm i$

Pour $i, i^3 + i = ?$

- $-i + i = 0$

$Z_0 = i$

$$\begin{array}{c|ccc|}
 & i & -3 & -3 \\
i & & & \\
\hline
\end{array}$$

$-3 \qquad -3$

Cet élève a bien commencé en trouvant la 1ère racine de l'équation qui est i, mais ne maîtrise pas la règle de Horner où les coefficients de Z se placent entre les deux barres verticales et le terme indépendant à droite de la 2e barre verticale. La 1èreracine doit se placer à gauche de la 1ère barre verticale un peu au-dessus de la ligne horizontale.

(3) 66 élèves (soit 55%) ont commis les erreurs de calcul c'est-à-dire ont fait de mauvais calcul.

Equation 3 : $i\,z^3 + (2i-1)z^2 - (i+4)z + 3\,(2\,i-1) = 0$

(1) 3 élèves (soit 2,5%) ont bien répondu à cette question où toutes les étapes étaient respectées ;
(2) 45 élèves (soit 37,5%) ont trébuché dans les calculs.

Voici quelques exemples de résolution :

$i\,z^3 + (2i-1)z^2 - (i+4)z + 3(2i-1) = 0$

$i\,z^3 + 2\,i\,z^2 - z^2 - i\,z - 4\,z + 6i - 3 = 0$

$a + bi = 0$

$i\,z^3 + 2i\,z^2 - iz + 6i = 0\ (1)$

$-z^2 - 4z - 3 = 0\ (2)$

(2) : $\Delta = 16 - 4\,(-1)(-3) = 16 + 4\,(-3) = 16 - 12 = 4$

$\sqrt{\Delta} = 2 \qquad \begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix} > \frac{2 \pm 2}{-2} > \begin{matrix} \frac{6}{-2} = -3 \\ 2/-2 = -1 \end{matrix}$

Pour Z_1 = -3, on a : $i\,(-3)^3 + 2\,i\,(-3)^2 - i\,(-3) + 6\,i = 0$

$= i\,(-27) + 2\,i\,(9) + 3\,i + 6\,i = 0$

$= -27\,i + 18\,i + 9\,i$

$= -27\,i + 27\,i$

$= 0$

Règle d'Horner

$$\begin{array}{r|cccc|}
 & i & 2\,i - 1 & -\,i - 4 & 6\,i - 3 \\
-3 & & -3\,i & 3\,i + 3 & -\,6\,i + 3 \\
\hline
 & i & -\,i - 1 & 2\,i - 1 & 0
\end{array}$$

$i\,z^2 - (1+i)\,z + 2\,i - 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4\,ac$

$= [-\,(1+i)]^2 - 4\,i\,(2\,i - 1)$

$= 1 + i^2 - 8i^2 - 4i$

$= -\,8\,i^2 - 4\,i$

$= 8 - 4\,i$

Ce raisonnement qui a été fait par un groupe d'élèves est correct jusqu'au niveau de la règle de Horner. Mais, le calcul de discriminant du quotient trouvé est faux à la 3e ligne.

Pour ces élèves, $(1+i)^2 = 1^2 + i^2$, comme pour dire que $(a+b)^2 = a^2 + b^2$. Ce qui n'est pas correct, ces élèves ne maitrisent pas le carré d'un binôme.

$i\,z^3 + (2\,i-1)z^2 - (i+4)z + 3\,(2\,i-1) = 0$

$i\,z^3 + 2\,i\,z^2 - z^2 - i\,z - 4\,z + 6\,i - 3 = 0$

$i\,z^3 + 2\,i\,z^2 - i\,z + 6i = 0\ (1)$

$-z^2 - 4z - 3 = 0\ (2)$

Pour $-z^2 - 4z - 3 = 0$

$a = -1, \quad b = -4, \quad c = -3$

$\Delta = b^2 - 4\,ac = (-4)^2 - 4\,(-1)(-3)$

$= 16 - 12$

$= 4$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4} = \pm 2$

$$\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix} > \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2\,a} < \begin{matrix} \frac{4+2}{-2} = -3 \\ \frac{4-2}{-2} = -1 \end{matrix} \Rightarrow z_1 = -3$$

Portons (2) dans (1)

$\Rightarrow i\ -3)^3 + 2\,i\,(-3)^2 - i\,(-3) + 6\,i = 0$

$\Rightarrow i\,(-27\,) + 2\,i\,(+9) + 3\,i + 6i = 0$

$\Rightarrow i\,(\,-27) + 18\,i + 3\,i + 6\,i = 0$

$-9\,i + 9\,i = 0$

	i	$2\,i-1$	$-1-4$	$6\,i-3$
-3		$-3\,i$	$3\,i+3$	$-6\,i+3$
	i	$-i-1$	$2\,i-1$	0

$i\,z^2 - (i+1)z + 2\,i - 1 = 0$

$a = i, b = -(i+1), c = 2\,i-1$

$\Delta = b^2 - 4\,a\,c$

$= [-(i+1)^2] - 4\,(i\,)(2\,i-1)$

$= i^2 + 2\,i + 1 - 4\,i(2\,i-1)$

$= i^2 + 2\,i + 1 - 8\,i^2 + 4\,i$

$= -1 + 2\,i + 1 - 8\,(-1) + 4\,i$

$= 2\,i + 8 + 4\,i$

$= 6\,i + 8$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{6\,i + 8}$

$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6^2 + 8^2}$

$= \sqrt{36 + 64}$

$= \sqrt{100} = \pm 10$

$x = \sqrt{\frac{a+r}{2}} = \sqrt{\frac{8+10}{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = \pm 3$

$$y_1 = \frac{b}{2\,.2\sqrt{2}} = \frac{8}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$y_2 = \frac{b}{2\,(-2\sqrt{2})} = \frac{8}{-2\sqrt{2}} = \frac{-2}{\sqrt{2}}$$

Très bon raisonnement jusqu'à la résolution de l'équation du second degré dégagée à partir de la règle de Horner.

Mais, le calcul de module bien que correct (r = 10) car l'addition étant commutative, l'élève ne maitrise pas les deux parties d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.

Pour $\Delta = 6i + 8$, la partie réelle est a = 8 et la partie imaginaire $b = 6$ et non l'inverse comme fait par ce dernier.

En outre, les racines carrées de Δ = 6 i + 8 sont de la forme :

$\pm\left(\sqrt{\frac{a+r}{2}} + i\sqrt{\frac{-a+r}{2}}\right)$ ou encore connaissant la valeur de $x = \sqrt{\frac{a+r}{2}} = \pm 3$,

On peut aussi calculer la valeur de y par $2\,xy = b$

$y = \frac{b}{2\,x}$ où b = 6 (et non 8 comme ci-haut)

et$x = \pm 3, soit\ y = \frac{6}{2\,(+3)} = \frac{6}{\pm 6} = \pm 1$

d'où les 2 autres racines de l'équation donnée sont :

$z_{2,3} = \pm(3 \pm 1.i)$

$= \pm\,(3 \pm i)$

$z_2 = 3 + i\ et\ z_3 = -3 - i$

Bref, cet élève ne maitrise pas la résolution de l'équation binôme. C'est-à-dire ne maitrise pas la recherche des racines carrées d'un nombre complexe non nul.

(3) 60% d'élèves ont fait de très mauvais calcul. Voici quelques exemples de résolution.

$-z^2 - 4\,z - 3 + i\,(z^3 + 2\,z^2 - z - 6) = 0$

$a + b\,i = 0 \Leftrightarrow a = 0,\ \ b = 0$

$-z^2 - 4\,z - 3 = 0$

$-(z^2 + 4\,z + 3) = 0$

$\Delta = 4^2 - 12 = 16 - 12 = 4$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4} = 2$

$\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix} => \frac{-4 \pm 2}{2} < \begin{matrix} -1 \\ -3 \end{matrix} \qquad s = \{-3, -1, \ i\}$

Raisonnement correct jusqu'au calcul de la 2e équation du système d'équations. Malheureusement pour ces élèves qui considèrent les racines de cette équation comme celles de l'équation donné (l'équation de départ).

$z_0 = i$

$\text{P}\ (i) = i\ (i^3) + (2\ i - 1)i^2 - (i + 4\ )i + b\ i - 3$

$= i^4 + 2\ i^3 - 1^2 - i^2 - 4\ i + 6\ i - 3$

$= 1 - 2 - 1 + 1 - 10\ i - 3 = -4 - 10\ i \neq 0$

$* P\ (Z) = i\ z^3 + (2\ i - 1\ )z^2 - (i + 4\ )z + 3\ (2\ i - 1)$

Les diviseurs de 3 sont : $\pm$ 1, 3, $\pm\ i, \pm 3$

$\text{P}\ (i) =$

$\text{P}\ ((-1) = -1 + 2\ i - 1 - i - 4 + 6\ i - 3 \neq 0$

Ces élèves ne maitrisent pas la notion des diviseurs d'un entier relatif qui est -3. Considérant les diviseurs fournis par ce groupe d'élèves, $\pm 1, \pm i$ ne sont pas les diviseurs de -3. Les diviseurs de -3 sont plutôt : $D_{-3} = \cdots, -6, -6i, -3, -3i, 3i, 3, 6, 6i,$ ...

IV. INTERPRETATION DES RESULTATS

De ces différentes analyses, il ressort ce qui suit :

- Quelques élèves oublient la méthode des diviseurs binômes ;
- Ils ne maîtrisent pas la règle de Horner ;
- Beaucoup d'élèves ne savent pas la recherche de la racine carrée de Δ = a + bi ;
- Nombreux d'entre eux éprouvent des difficultés pour les opérations de i avec $i^2 = -1$;
- Beaucoup d'entre eux ont pris la racine du système d'équation formée par la partie réelle et la partie imaginaire comme solution de l'équation donnée.

A. Tableau relatif aux résultats de la maîtrise

	REUSSITE		ECHEC	
	f	*%*	*f*	*%*
Question 1	12	10	108	90
Question 2	6	5	114	95
Question 3	3	2,5	117	97,5
Total	**21**	**17,5**	**339**	**282,5**
Moyenne d'élèves	**7**	**5,83**	**113**	**94,16**

B. Tableau relatif aux erreurs commises

	Recherche de Z_0 1ère racine		Coefficients de $az^2 + bz + c = 0$		Calcul de discriminant et de racine carrée de Δ		Racines de $az^2 + bz + c = 0$		Somme d'erreurs	
	f	*%*	*f*	*%*	*f*	*%*	*f*	*%*	*f*	*%*
Question 1	7	5,8	9	7,5	19	15,8	19	15,8	54	45
Question 2	8	6,6	11	9,1	30	25	12	10	61	50,8
Question 3	15	12,5	23	19,1	16	13,3	23	19,1	77	64,1
Total	**30**	**24,9**	**43**	**35,7**	**65**	**54,1**	**54**	**44,9**	**192**	**159,9**
Moyenne d'élèves	**10**	**8,3**	**14,3**	**11,9**	**21,6**	**18**	**18**	**14,9**	**64**	**53,3**

CONCLUSION

Le sujet de notre recherche intitulé « Analyse des difficultés rencontrées par les élèves de 6e année des humanités scientifiques sur la résolution des équations du 3e degré dans ℂ ; cas de quelques écoles non conventionnées de la ville de Kisangani de 2019 – 2020.

La problématique de notre thème s'est focalisée sur la question fondamentale ci-après :

Les élèves de 6e année des humanités scientifiques sont-ils capables de résoudre les équations du 3e degré dans ℂ ? Partant de cette question principale, va naître deux autres spécifiques qui sont :

- Les élèves de 6e années des humanités scientifiques sont-ils capables de résoudre un système de deux équations du second degré dans ℂ ?
- Les élèves de 6e année des humanités scientifiques sont-ils capables de déterminer Z qui est la première racine de l'équation du 3e degré dans ℂ ?
- L'objectif principal poursuivi par notre étude consiste à vérifier si les élèves de 6e année des humanités scientifiques sont en mesure de résoudre les équations du 3e degré dans ℂ ?
- Vérifier si les élèves de 6e année des humanités scientifiques sont capables de résoudre un système de deux équations du 2nd degré dans ℂ ?
- Vérifier si les élèves de la 6e année des humanités scientifiques sont capables de déterminer la 1ère racine de l'équation du 3e degré dans ℂ ?

Les hypothèses émises pour notre étude sont les suivantes :

- ***Hypothèse principale :***
  - Les élèves de 6^e année des humanités scientifiques ne seraient pas capables de résoudre les équations du 3^e degré dans $\mathbb{C}$.
- ***Hypothèses spécifiques :***
  - Les élèves de 6^e année des humanités scientifiques ne seraient pas capables de résoudre un système de deux équations du second degré dans $\mathbb{C}$;
  - Les élèves de 6^e année des humanités scientifiques ne seraient pas capables de déterminer Z_0, la première racine de l'équation du 3^e degré dans $\mathbb{C}$.

En vue de vérifier nos hypothèses et d'atteindre nos objectifs poursuivis, sur un effectif total de 195 élèves que comptent ces cinq écoles ciblées, nous avions extrait un échantillon de 120 élèves à qui nous avions soumis un questionnaire d'enquête comportant trois questions sur la résolution des équations du 3^e degrés, les coefficients réels ou complexes ont constitué les variables dépendantes.

Après analyse, il ressort ce qui suit : 12 élèves sur 120 (soit 10%) ont bien répondu à la $1^{ère}$ question dont les coefficients sont réels et complexes et 108 élèves (soit 90%) ont vraiment échoué. Notons que 60 élèves soit (50%) ne maîtrisent pas la règle de Horner et 48 élèves (soit 40%) oublient totalement la résolution d'une équation du 3^e degré dans $\mathbb{C}$.

A la 2^e équation où les coefficients sont réels et complexes, 6 élèves sur 120 (soit 5%) ont bien répondu, 114 élèves (soit 95%) n'ont pas réussi. Parmi ceux-ci, 48 élèves (soit 40%) ont échoué à certains endroits et 66 élèves (soit 55%) ne savent absolument rien de la résolution de l'équation du 3^e degré dans $\mathbb{C}$.

A la 3^e question dont tous les coefficients sont complexes 3 élèves sur 120 (soit 2,5%) ont bien répondu avec tous les détails, alors que 117 élèves (soit 97,5%) ont alors échoué. Parmi les 117 élèves, 45 élèves (soit 37,5%) ne maîtrisent pas certaines étapes de la résolution et 72 élèves (soit 60%) ont fait des mauvais calculs c'est-à-dire ont totalement échoué.

Sur les trois questions à résoudre, 7 élèves en moyenne sur 120 (soit 5,9%) ont correctement répondu tandis que 113 élèves (soit 94,1%) en moyenne éprouvent des difficultés pour résoudre les équations du 3^e degré dans $\mathbb{C}$.

Les causes de ces difficultés qu'éprouvent ces élèves de 6^e année des humanités scientifiques seraient alors dues à la non maîtrisent de la méthode de diviseur binôme qui consiste à écrire $p(Z_0) = 0$ où Z_0 est l'une des racines de l'équation donnée, suivie par celle de la règle de HORNER ou encore la division euclidienne de $p(Z)\ par\ Z - Z_0$.

De la résolution du système de deux équations du second degré dans $\mathbb{C}$ permettant de déterminer Z_0, la première racine de l'équation donnée avant de passer à la règle de Horner pour dégager le quotient Q (Z) = $az^2 + bz + c$, à résoudre Q (Z) = 0 $\Rightarrow az^2 + bz + c = 0$ afin de trouver les deux autres racines en cherchant $\Delta = b^2 - 4\Delta c$

$$\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix} > \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Au vu de ces résultats, nous constatons que nos objectifs sont atteints et les hypothèses sont confirmées.

Les hypothèses ainsi confirmées font état de l'existence des difficultés des élèves de 6^e année des humanités scientifiques sur les équations de 3^e degré dans $\mathbb{C}$, lesquelles difficultés ont été prouvées sur la résolution de ces dernières.

Enfin, nous ne pouvons pas relever toutes les difficultés rencontrées par ces élèves car, l'œuvre humaine est imparfaite. Nous demanderons aux autres chercheurs que la chose intéresse de continuer dans la même voie car, la science est en perpétuelle évolution.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

I. OUVRAGES

- AUDIGIER, M.N & CIE (1983), *Mathématique : Situations - Exercices – Problèmes, Activités terminales, collection Di mathème*, édition Didier, Paris ;
- BATODISA Vuma G. & CIE (2005), *Maîtriser les Maths 6, 6ème Scientifique et Techniques*, éditions Loyola, Kinshasa ;
- JAVEAU, CL (1982), *L'enquête par questionnaire, Manuel à l'usage du praticien*, édition d'organisation, Paris ;
- KOURGANOFF, V. (1965), *La Recherche Scientifique, Que sais-je* ? Paris ;
- SCHONS N.J & S (1961), *Exercices d'Algèbre*, Tome 2, La Procure Namur, Bruxelles.

II. MEMOIRES ET PUBLICATIONS SCIENTIFIQUES

- HATEGE KIMANA, E. (2012), *Les problèmes de l'enseignement des nombres rationnels et irrationnels*, Mémoire de DEA, Inédit, UPN, Kinshasa ;
- OHOMA KONGA (2007), *Analyse des difficultés rencontrées par les élèves de 6ème des humanités scientifiques sur les opérations dans le corps des nombres complexes ; cas de la ville de Kisangani*, Mémoire de Licence, Inédit, ISP-KISANGANI ;
- WUNGU EMBONDO (2015), *Apprentissage de l'enseignement des écritures complexes des isométries usuelles,* Mémoire de Licence, Inédit, ISP-KISANGANI.

III. DICTIONNAIRES

- Dictionnaire universel (2008), revu et corrigé, 5e édition, Paris ;
- STALLA (2), Dictionnaire des mathématiques élémentaires, Dunod, Paris ;
- THEMA encyclopédie, Sciences et Techniques, éditions Larousse, Paris.